Chapitre 1 : le second degré (1ère partie)

I) Forme canonique

Théorème 1 : Tout trinôme du second degré ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ ou α et β sont des constantes réelles, appelée **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :

ax^2+bx+c = ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

donc on a bien ax^2+bx+c = $a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$ avec α = ..…… et β = ……………..

Exemple :

Mettre sous la forme canonique le trinôme $3x^2 - 24x + 41$

$3x^2 - 24x + 41$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

II) Équation du second degré

Théorème 2 : Le nombre de solution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ dépend du signe de son **discriminant** $\Delta=b^2-4ac$:

- si $\Delta<0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$,
- si $\Delta=0$, il y a une solution dite « double » : $x=\dfrac{-b}{2a}$,
- si $\Delta>0$, il y a deux solutions distinctes : $x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration :

En utilisant la forme canonique, on a : ax^2+bx+c = ……………………………………………

= ……………………………………………

En posant $\Delta=b^2-4ac$, on a donc : ax^2+bx+c = ……………………………………………

Alors, l'équation $ax^2+bx+c=0$ équivaut à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ avec $a \neq 0$

- Si $\Delta<0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}$ est ………………… …………… , et donc l'équation n'a pas de solution car ………………………………………………………………………………

- Si $\Delta=0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ équivaut à ………………… ou encore …………………

  Donc l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une solution unique : x = ……

- Si $\Delta>0$, en utilisant : $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ on a alors :

  ax^2+bx+c = …………………………………………………

  = …………………………………………………

  = …………………………………………………

  Ainsi $ax^2+bx+c=0$ équivaut à ………………………… ou …………………………

  L'équation admet donc deux solutions distinctes : x_1 =……………… et x_2 =………………

Exemple :

Résoudre l'équation $2x^2-3x-1=0$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Conséquence :

La démarche utilisée pour la démonstration a permis de mettre en évidence le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit l'expression du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et son discriminant $\Delta=b^2-4ac$:

- si $\Delta<0$, il n'existe aucune factorisation de $f(x)$,
- si $\Delta=0$, $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,
- si $\Delta>0$, $f(x)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Exemple :

Factoriser le trinôme $6x^2+11x-7$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III) Sens de variation

Théorème 4 : On considère une fonction trinôme du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$. La courbe représentative de *f*, d'équation $y=ax^2+bx+c$ est une **parabole** de sommet $S\left(\alpha=-\dfrac{b}{2a};\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Et l'on a :

si $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

si $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration :

On considère la fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$).

On sait que $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec α = …… et β = ………….

- ✓ Si $a>0$, étudions le sens de variation de *f* dans l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.

  Soients x_1 et x_2 deux réels de $[\alpha,+\infty[$ tels que $\alpha\leq x_1<x_2$

  On a donc : ……………………………

  Puis : ………………………………… car la fonction carrée est ……………… sur $\mathbb{R}^+$,

  D'où : ………………………………… puisque $a>0$

  Enfin : ……………………………………………

  C'est-à-dire …………………… ce qui montre que *f* est strictement ……………… sur $[\alpha,+\infty[$.

- ✓ Si $a>0$, étudions maintenant le sens de variation de *f* dans l'intervalle $]-\infty,\alpha]$.

  Soients x_1 et x_2 deux réels de $]-\infty,\alpha]$ tels que $x_1<x_2\leq\alpha$

  On a donc : ……………………………

  Puis : ………………………………… car la fonction carrée est ……………… sur $\mathbb{R}^-$,

  D'où : ………………………………… puisque $a>0$

  Enfin : ……………………………………………

  C'est-à-dire …………………… ce qui montre que *f* est strictement ……………… sur $]-\infty,\alpha]$.

Un raisonnement du même type permet d'établir le cas avec $a<0$.

Exemple :

Donner le tableau de variation de la fonction trinôme $f(x) = -2x^2 + 12x - 3$

………

………

………

IV) Représentation graphique

De ce qui précède, on déduit les résultats suivants :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		