Chapitre 11 : Produit Scalaire

I) Définition et expressions

1) Norme d'un vecteur

Définition 1 : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux point A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
La **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Remarque : Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit ……………………….

Conséquences :

- ✓ $\|\overrightarrow{AB}\|$ = 0 équivaut à ……………….
- ✓ Pour tout réel k, $\|k\vec{u}\| =$ ………………

2) Définition du produit scalaire

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le **nombre réel** définit par :

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.

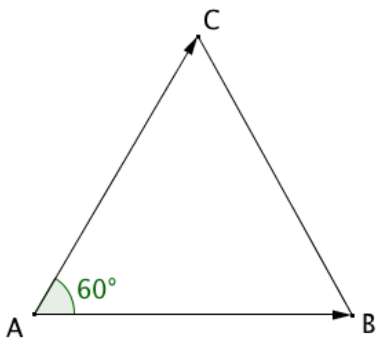
Exemple : Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ……………………………………………….

= …………………………………

= …………………

= ………..



Carré scalaire : $\vec{u}^2$ = ……… = ………

En effet $\vec{u}.\vec{u}$ = …………………………………… = ………………………………… = ………..

Remarque : Le produit scalaire peut aussi être nul si le cosinus de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est ………. , c'est-à-dire si $(\vec{u};\vec{v})$ = ……………………..

3) Autres expressions du produit scalaire

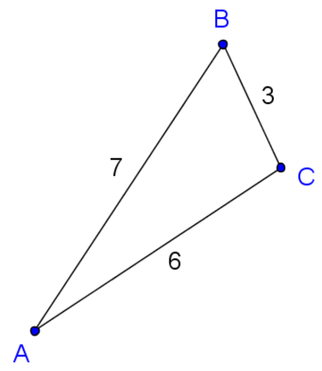
Propriété 1 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration : voir cahier d'exercice.

Exemple 1 : Soit ABC un triangle tel que :

$AB = 7$
$BC = 3$
$AC = 6$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………

= ……………………………………………………

= ……………………………………………………

Propriété 2 : Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$,
alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration : voir cahier d'exercice.

Exemple 2 : Soit $\vec{u}(5;-4)$ et $\vec{v}(-3;7)$ deux vecteurs.
$\vec{u}.\vec{v} =$ ……

II) Règles de calculs

Propriété 3 : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout réel k, on a :

- ✓ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- ✓ $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = \left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} =$ ……………………………………………………………

= ……………………………………………………………

= ……………………………………………………………

= ……………………………………………………………

= ………………

On admet les 2 autres propriétés.

Propriété 4 : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- ✓ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III) Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Définition 3 : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'on a, en posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**.

Remarque : Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété 5: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow$ ………………………………………………….

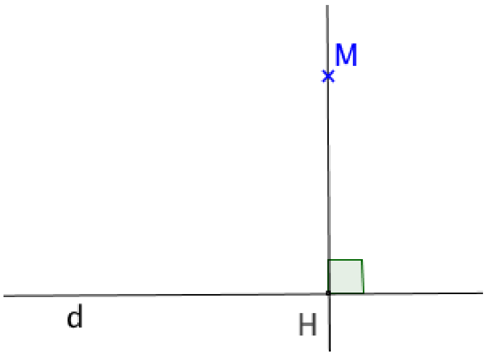
$\Leftrightarrow$ ………………………………………………….

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………….

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………….

2) Projection orthogonale

Définition 4 : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété 6: Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=$ ……………………………………………

$=$ ………………………………………………

$=$ ………………………………………………