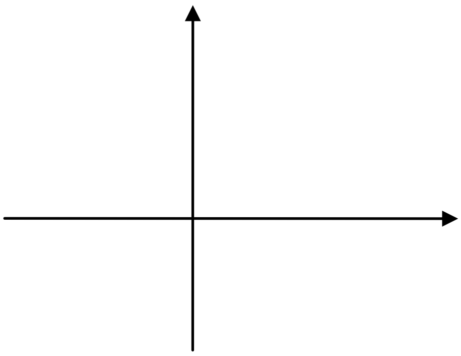
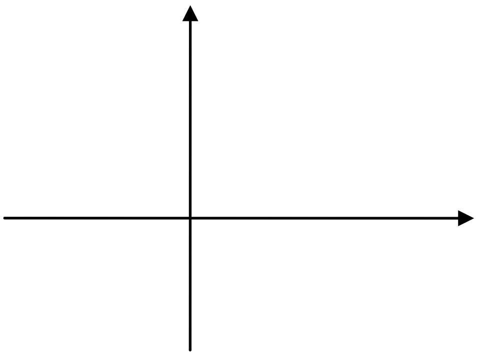
Chapitre 5 : Fonctions de référence et fonctions associées

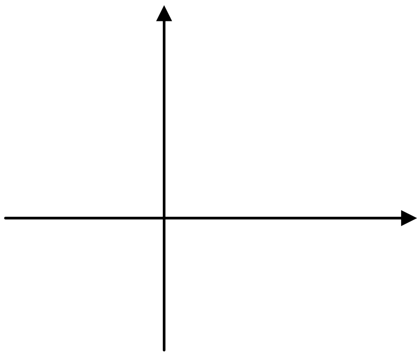
I) Sens de variation d'une fonction

Définition 1: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire que :

- f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de I, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **alors** $\boldsymbol{f(a)} \dots \boldsymbol{f(b)}$
- f est **strictement croissante** sur I signifie que pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de I, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **alors** $\boldsymbol{f(a)} \dots \boldsymbol{f(b)}$
- f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de I, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **alors** $\boldsymbol{f(a)} \dots \boldsymbol{f(b)}$
- f est **strictement décroissante** sur I signifie que pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de I, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **alors** $\boldsymbol{f(a)} \dots \boldsymbol{f(b)}$
- f est **constante** sur I signifie que pour tous réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de I : $\boldsymbol{f(a)} \dots \boldsymbol{f(b)}$.
- f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.





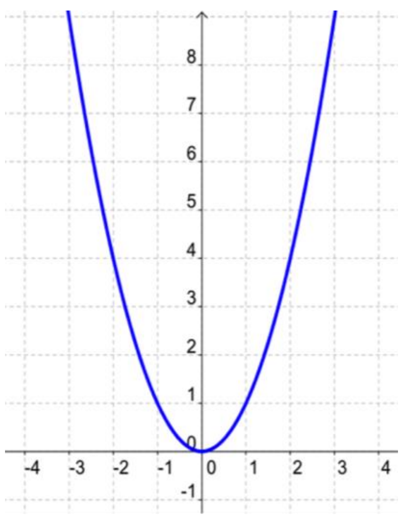


…………………………………… ……………………………………….. ……………………………….

II) Rappels

1) La fonction carrée :

Définition 2 : On appelle **fonction carrée**, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.



Propriété 1 :
La fonction carrée est **strictement décroissante** sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

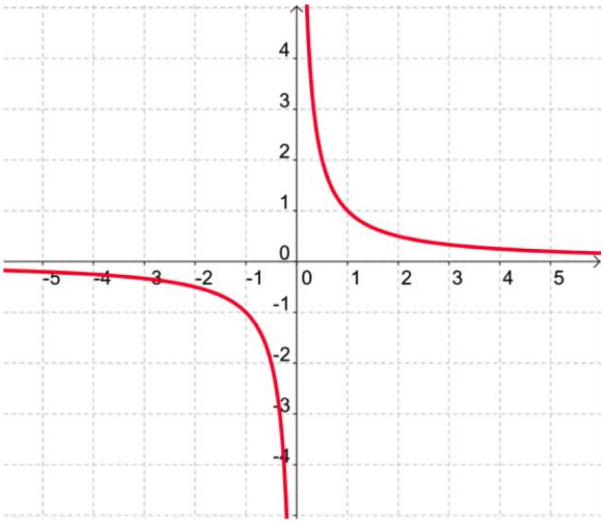
Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2		

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carrée est ………………… par rapport à …………………..

2) La fonction inverse :

Définition 3 : On appelle **fonction inverse**, la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Propriété 2 :
La fonction inverse est **strictement décroissante** sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation :

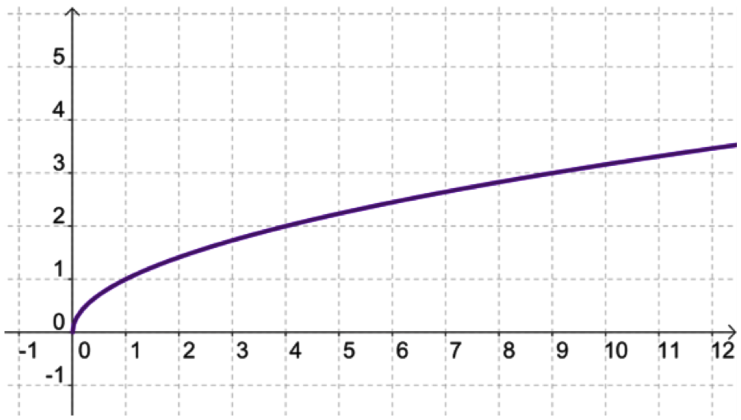
x	$-\infty$		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		‖	

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction inverse est ………………… par rapport à ……………………………

III) La fonction racine carrée

Définition 4 : On appelle **fonction racine carrée**, la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

1) Sens de variation et courbe représentative :



Propriété 3 :
La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$.

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		

Démonstration : Soit deux réels positifs a et b tels que $a < b$. Pour comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, on va étudier le signe de leur différence :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

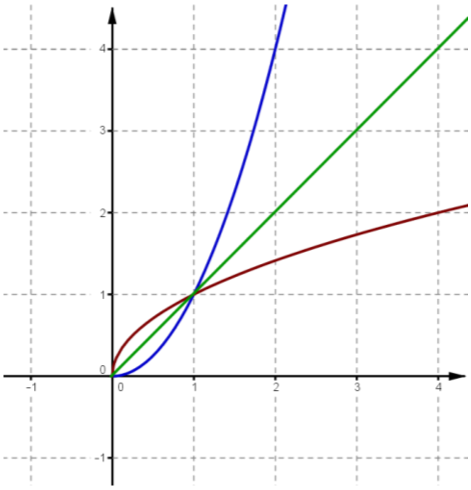
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Position relative de courbes représentatives :



Propriété 4 :

- ✓ Si $x \in [0;1]$ alors .... ≤ .... ≤ ....
- ✓ Si $x \in [1;+\infty[$ alors .... ≤ .... ≤ ....

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carrée sur $[0 ; +\infty[$ et celle de la fonction racine carrée sont .... par rapport à la droite d'équation ....

Démonstration : Pour tout nombre réel positif x :

- ✓ $x^2 - x =$ ....

....

....

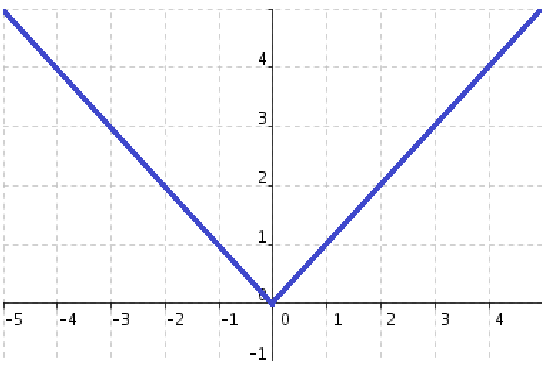
- ✓ $x - \sqrt{x} =$ ....

....

....

IV) La fonction valeur absolue

Définition 5 : On appelle **fonction valeur absolue**, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.



Propriété 5 :
La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\|x\|$		

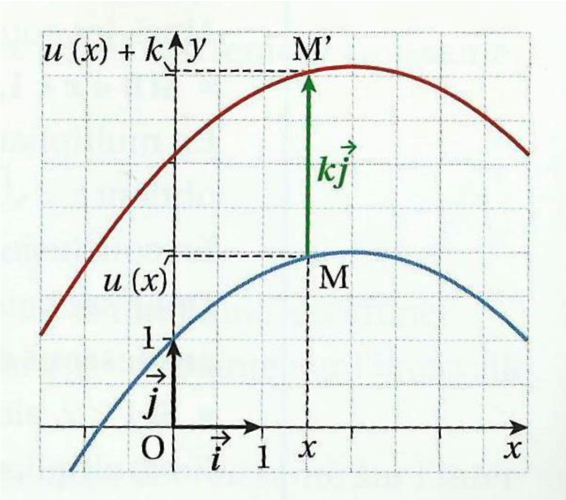
Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des deux .... d'équations .... sur $]-\infty;0]$ et .... sur $[0;+\infty[$. Elle est .... par rapport à ....

Propriété 6 : $|x| = d(x;0) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$. On retiendra qu'une valeur absolue est une distance, c'est donc un nombre positif.

V) Sens de variation des fonctions associées

1) Les fonctions $u + k$

> **Théorème 1 :** Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel.
> Les fonctions u et $u + k$ ont le **même sens de variation** sur I.



Démonstration : Supposons que la fonction u est croissante sur un intervalle I.

Pour tous réel a et b de I, on a : ………………………………

En ajoutant k aux deux membres de l'inégalité, on obtient :

…………………………………

Ainsi $u + k$ est …………………… sur I.

Même raisonnement pour u décroissante.

Remarque : la courbe représentative de la fonction $u + k$ est l'image de celle de la fonction u par la ………………… de vecteur ………

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0;100]$ par $f(x) = \sqrt{x} - 3$.

x	0 $\qquad\qquad$ 100
$\sqrt{x}$	
$\sqrt{x} - 3$	

même sens
de variation

2) Les fonctions ku

> **Théorème 2 :** Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel **non nul**.
> - Si $\boldsymbol{k > 0}$, les fonctions u et ku ont le **même sens de variation** sur I.
> - Si $\boldsymbol{k < 0}$, les fonctions u et ku ont des **sens de variation contraires** sur I.

Démonstration : Supposons que la fonction u est croissante sur un intervalle I

Pour tous réel a et b de I, on a : ……………………………………

En multipliant les 2 membres de l'inégalité par k, on obtient :

Si $k > 0$	Si $k < 0$
………………………………	………………………………
Ainsi ku est …………………… sur I.	Ainsi ku est …………………… sur I.

Même raisonnement pour u décroissante.

Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2		
$-\dfrac{1}{2}x^2$		

sens de variation
contraire car $-\dfrac{1}{2} < 0$

3) Les fonctions $\sqrt{u}$

Théorème 3 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $\boldsymbol{u(x) \geq 0}$
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le **même sens de variation** sur I.

Démonstration : Supposons que la fonction u est croissante et à valeurs positives sur un intervalle I
Pour tous réel a et b de I, on a : ……………………………………………
La fonction racine étant croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient : ……………………………………
Ainsi $\sqrt{u}$ est …………………….. sur I.

Même raisonnement pour u décroissante.

Exemple : Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,;3]$ par $h(x) = \sqrt{-2x+6}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 3
$-2x+6$	
$\sqrt{-2x+6}$	

même sens de variation

4) Les fonctions $\frac{1}{u}$

Théorème 4 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout x de I, $\boldsymbol{u(x) \neq 0}$ et $u(x)$ **garde le même signe**. Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des **sens de variation contraires** sur I.

Démonstration : Supposons que la fonction u est croissante sur un intervalle I
Pour tous réel a et b de I, on a : ……………………………………………

Si $u(x) > 0$ pour $x \in \mathrm{I}$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$

……………………………………

Ainsi $\frac{1}{u}$ est …………………….. sur I.

Si $u(x) < 0$ pour $x \in \mathrm{I}$

La fonction inverse étant décroissante sur $]-\infty;0[$

……………………………………

Ainsi $\frac{1}{u}$ est …………………….. sur I.

Même raisonnement pour u décroissante.

Exemple : Soit l la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $l(x) = \frac{1}{x^2}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2		
$\frac{1}{x^2}$		

sens de variation contraire