Correction du Devoir Commun n°1 des $1^{ères}$S

Exercice 1 :

1) $\Delta = 7^2 - 4\times 2\times(-15) = 49+120 = 169 > 0$

Cette équation admet donc 2 solutions : $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{169}}{2\times 2} = \dfrac{-20}{4} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{169}}{2\times 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

D'où $S = \boxed{\left\{-5;\dfrac{3}{2}\right\}}$

2) $\Delta = (-19)^2 - 4\times 6\times(-7) = 361+168 = 529 > 0$

Ce trinôme admet donc 2 racines : $x_1 = \dfrac{19-\sqrt{529}}{2\times 6} = \dfrac{-4}{12} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{19+\sqrt{529}}{2\times 6} = \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2}$

D'où $A = 6\left(x-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right) = 6\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{2}\right) = \boxed{(3x+1)(2x-7)}$

Exercice 2 :

1) $M(x;y)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\boxed{A(0;0)}$ car A est l'origine du repère ; $\boxed{B(1;0)}$ car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$; $\boxed{C(0;1)}$ car $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$

$\boxed{I\left(\dfrac{1}{2};0\right)}$ car $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}$; $\boxed{L(0;3)}$ car $\overrightarrow{AL} = 0\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

Donc $\boxed{J\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{5}\right)}$

2) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{5}-0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{10}\\ \dfrac{3}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0-\dfrac{1}{2}\\ 3-0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\ 3\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont colinéaires car $X_{\overrightarrow{IJ}}\times Y_{\overrightarrow{IL}} - X_{\overrightarrow{IL}}\times Y_{\overrightarrow{IJ}} = -\dfrac{1}{10}\times 3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{5} = -\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10} = 0$ et

donc $\boxed{\text{les points } I, J \text{ et } L \text{ sont alignés.}}$

Exercice 3 :

1) Soit un point $M(x;y)$ dans le repère.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\ y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-3\\ 1-2\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\ -1\end{pmatrix}$

M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc si :

$$X_{\overrightarrow{AM}}\times Y_{\overrightarrow{AB}} - X_{\overrightarrow{AB}}\times Y_{\overrightarrow{AM}} = 0$$
$$(x-3)\times(-1)-(-5)\times(y-2) = 0$$
$$-x+3+5y-10 = 0$$

$\boxed{-x+5y-7=0}$ est l'équation de la droite (AB).

2) Soit un point $M(x;y)$ dans le repère.

On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\ y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$

M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc si :

$$X_{\overrightarrow{CM}} \times Y_{\vec{u}} - X_{\vec{u}} \times Y_{\overrightarrow{CM}} = 0$$
$$(x-2)\times 4 - 2\times(y+1) = 0$$
$$4x - 8 - 2y - 2 = 0$$
$$4x - 2y - 10 = 0$$

$\boxed{2x - y - 5 = 0}$ est l'équation de la droite (AB).

3) Equation réduite de la droite (AB) : $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$ coefficient directeur : $\frac{1}{5}$

Equation réduite de la droite d : $y = 2x - 5$ coefficient directeur : 2

Les coefficients directeurs sont différents donc **(AB) et d ne sont pas parallèles donc sécantes.**

4) Les coordonnées du point d'intersection E sont les solutions du système :

$\begin{cases} -x + 5y - 7 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$ En multipliant la 1[ère] ligne par 2, on obtient : $\begin{cases} -2x + 10y - 14 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$

En additionnant, on a : $\begin{cases} 9y - 19 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} y = \frac{19}{9} \\ 2x - \frac{19}{9} - 5 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = \frac{19}{9} \\ 2x = \frac{64}{9} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = \frac{19}{9} \\ x = \frac{32}{9} \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{E\left(\frac{32}{9};\frac{19}{9}\right)}$

Exercice 4 :

En posant $X = x^2$, l'équation devient : $X^2 - X - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$. Cette équation admet donc 2 solutions :

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Comme $X = x^2$, il faut donc résoudre $x^2 = -2$ et $x^2 = 3$. La première équation n'admet pas de solution car un carré ne peut pas être négatif, la deuxième équation admet 2 solutions : $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \sqrt{3}$

D'où $S = \boxed{\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}}$

Exercice 5 :

Si on appelle x la longueur que l'on ajoute à chacun des côtés du triangle, les longueurs des côtés deviennent $(x+3)$, $(x+4)$ et $(x+6)$. Comme on doit obtenir un triangle rectangle, on peut appliquer le théorème de Pythagore et on a :

$$(x+3)^2 + (x+4)^2 = (x+6)^2$$
$$x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = x^2 + 12x + 36$$
$$x^2 + 2x - 11 = 0$$

$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-11) = 4 + 44 = 48 > 0$. Cette équation admet donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{48}}{2\times 1} = \frac{-2 - 4\sqrt{3}}{2} = -1 - 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{48}}{2\times 1} = \frac{-2 + 4\sqrt{3}}{2} = -1 + 2\sqrt{3}$$

Comme x est une distance, x doit être positif et donc la longueur cherchée est : $\boxed{-1 + 2\sqrt{3}}$

Exercice 6 :

1) La droite d_m passe par le point $A(2;3)$ si $(m+1)\times 2+(1-2m)\times 3+3=0$

$$2m+2+3-6m+3=0$$

$$-4m=-8 \text{ et donc } \boxed{m=\frac{-8}{-4}=2}$$

2) Un vecteur directeur de la droite Δ : $\vec{u}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la droite d_m : $\vec{v}\begin{pmatrix}-(1-2m)\\m+1\end{pmatrix}$

Les droites Δ et d_m sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires donc si :

$$X_{\vec{u}}\times Y_{\vec{v}}-X_{\vec{v}}\times Y_{\vec{u}}=0$$

$$(-7)\times(m+1)-(-(1-2m))\times 5=0$$

$$-7m-7+5-10m=0$$

$$-17m-2=0 \quad \text{et donc } \boxed{m=-\frac{2}{17}}$$

3) La droite d_m est parallèle à l'axe des abscisses si son équation est de la forme $y=k$, il faut donc que :

$m+1=0$ c'est-à-dire $\boxed{m=-1}$

4) La droite d_m est parallèle à l'axe des ordonnées si son équation est de la forme $x=k$, il faut donc que :

$1-2m=0$ c'est-à-dire $\boxed{m=\frac{1}{2}}$