Correction du Devoir Commun n°2 des 1$^{\text{ères}}$S

Exercice 1 : voir cours

Exercice 2 :

1)

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times7=8>0$ donc 2 racines : $x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{8}}{2\times1}=3+\sqrt{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{2}$		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de x^2-6x+7		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=]-\infty\,;3-\sqrt{2}[\cup]3+\sqrt{2}\,;+\infty[$

2)

$\dfrac{3x-1}{4x+7}\leq\dfrac{2x-3}{5-x}$ valeurs interdites : $x\neq-\dfrac{7}{4}$ et $x\neq5$

$$\frac{(3x-1)\times(5-x)-(4x+7)\times(2x-3)}{(4x+7)\times(5-x)}\leq0$$

$$\frac{(15x-3x^2-5+x)-(8x^2-12x+14x-21)}{(4x+7)\times(5-x)}\leq0$$

$$\frac{-3x^2+16x-5-8x^2-2x+21}{(4x+7)\times(5-x)}\leq0$$

$\dfrac{-11x^2+14x+16}{(4x+7)\times(5-x)}\leq0$ Cherchons le signe de $-11x^2+14x+16$

$\Delta=14^2-4\times(-11)\times16=900>0$ donc 2 solutions

$x_1=\dfrac{-14-30}{-22}=-2$ et $x_2=\dfrac{-14+30}{-22}=-\dfrac{8}{11}$

d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		$-\frac{8}{11}$		2		5		$+\infty$
$-11x^2+14x+16$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$4x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Quotient		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $S=\left]-\dfrac{7}{4}\,;-\dfrac{8}{11}\right[\cup]2\,;5[$

Exercice 3 :

2) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ on a $A(0;0)$ origine du repère ; $B(1;0)$; $D(0;1)$; $C(1;1)$ car $\overrightarrow{AC}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}$

$E(\frac{2}{3};1)$ car $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}$

$F(1;\frac{3}{2})$ car $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=1\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les points A,E et F sont alignés.

4) Soit $M(x;y)$ un point dans le repère. On a :

$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1-0\\\frac{3}{2}-1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

M appartient à la droite *(DF)* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires donc si :

$$\frac{1}{2}x-1\times(y-1)=0$$

$$\frac{1}{2}x-y+1=0$$ est une équation de la droite *(DF)*.

5)Soit $M(x;y)$ un point dans le repère. On a :

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\1-0\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$.

M appartient à la droite *(BE)* si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires donc si :

$$(x-1)-(\frac{-1}{3})y=0$$

$$x+\frac{1}{3}y-1=0$$ est une équation de la droite *(BE)*.

6) Les coordonnées du point d'intersection I sont les solutions du système :

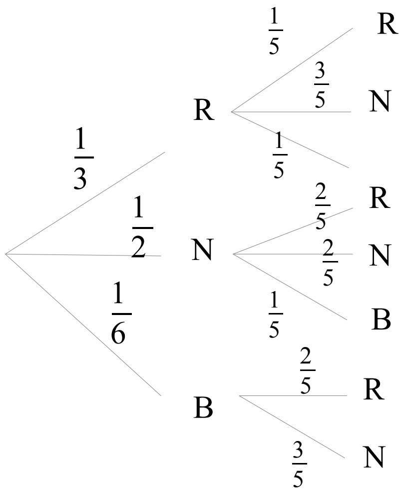
$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y+1=0\\x+\frac{1}{3y}-1=0\end{cases}$ On multiplie par 2 la 1ère équation et par 6e équation, on obtient

$\begin{cases}x-2y+2=0\\6x+2y-6=0\end{cases}$. En additionnant : $\begin{cases}7x-4=0\\6x+2y-6=0\end{cases}$ soit : $\begin{cases}x=\frac{4}{7}\\6\times\frac{4}{7}+2y-6=0\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}x=\frac{4}{7}\\y=\frac{9}{7}\end{cases}$

donc $I\left(\frac{4}{7};\frac{7}{9}\right)$.

Exercice 4 :

1)



2) Pour le tirage Rouge-Rouge, la valeur de la variable X est : $X=(-5)+(-5)=-10$. De même, on a :

$X=\{-20\,;-15\,;-10\,;+10\,;+20\}$

3) $p(X=-15)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

4)

$X=x_i$	-20	-15	-10	10	15
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

5)

$$E(X)=\frac{1}{5}\times(-20)+\frac{2}{5}\times(-15)+\frac{1}{15}\times(-10)+\frac{1}{5}\times 10+\frac{2}{15}\times 15=\frac{-60-90-10+30+30}{15}=\frac{-100}{15}=-\frac{20}{3}$$

Ce jeu est défavorable, un joueur peut perdre en moyenne, s'il joue un très grand nombre de fois, $\frac{20}{3}$ € .

Exercice 5 :

1) $x\in[0\,;6]$

2) $A_{SDP}=\frac{SD\times DP}{2}=\frac{(6-x)\times x}{2}=\frac{6x-x^2}{2}$ $\quad$ $A_{PCQ}=\frac{PC\times CQ}{2}=\frac{(6-x)\times x}{2}=\frac{6x-x^2}{2}$ d'où

$$A_{SDP}+A_{PCQ}=2\times\frac{6x-x^2}{2}=6x-x^2$$

3) $A_{SAR}=\frac{SA\times AR}{2}=\frac{x\times 1}{2}=\frac{x}{2}$ $\quad$ $A_{RBQ}=\frac{RB\times BQ}{2}=\frac{5\times(6-x)}{2}=\frac{30-5x}{2}=15-\frac{5x}{2}$

4)

$$A(x)=A_{PQRS}=A_{ABCD}-(A_{SDP}+A_{PCQ}+A_{SAR}+A_{RBQ})=6\times 6-(6x-x^2+\frac{x}{2}+15-\frac{5x}{2})=36+x^2-4x-15=x^2-4x+21$$

5) $A(x)=x^2-4x+21$, a=1(>0) donc $A(x)$ a pour représentation graphique une parabole « tournée » vers le haut. De plus son sommet a pour coordonnées $S=\left(\frac{-b}{2a}\,;A\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ soit $S(2\,;A(2))$, or $A(2)=2^2-4\times 2+21=17$ .Donc, le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2\,;17)$.

On peut en déduire le tableau de variations suivant :

x	0	2	17
$A(x)$	21 ↘	17	↗ 33

6) D'après le tableau de variations précédent, l'aire du quadrilatère *PQRS* est minimale pour $x = 2$. La valeur de cette aire est $A(2) = 17$.

Exercice 6 :

a) $2\times 0^4-9\times 0^3+8\times 0^2-9\times 0+2=2$ donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

b) On peut diviser chaque membre de l'équation par x^2 car $x\neq 0$ ce qui donne $\frac{2x^4-9x^3+8x^2-9x+2}{x^2}=\frac{0}{x^2}$ d'où :

$2x^2-9x+8-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$ (E')

2) a) $2x^2-9x+8-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$ équivaut à $2(x^2+\frac{1}{x^2})-9(x+\frac{1}{x})+8=0$

$2\left((x+\frac{1}{x})^2-\frac{2\times x\times 1}{x}\right)-9(x+\frac{1}{x})+8=0$

$2(x+\frac{1}{x})^2-4-9(x+\frac{1}{x})+8=0$

$2(x+\frac{1}{x})^2-9(x+\frac{1}{x})+4=0$ On pose $X=x+\frac{1}{x}$ d'où $2X^2-9X+4=0$

b) $2X^2-9X+4=0$ calculons $\Delta=(-9)^2-4\times 2\times 4=49>0$ donc 2 solutions $X_1=\frac{-(-9)-7}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et

$X_2=\frac{-(-9)+7}{2\times 2}=\frac{16}{4}=4$

c)

On a donc $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ ou $x+\frac{1}{x}=4$

$x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0$ $\qquad$ $x+\frac{1}{x}-4=0$

$\frac{2x^2-x+2}{2x}=0$ $\qquad$ $\frac{x^2-4x+1}{x}=0$

Ce qui revient à $2x^2-x+2=0$ et $x\neq 0$ $\qquad$ $x^2-4x+1=$ et $x\neq 0$

$\Delta=(-1)^2-4\times 2\times 2=1-16=-15<0$ $\qquad$ $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 1=12>0$

donc pas de solution $\qquad$ donc deux solutions

$x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{12}}{2\times 1}=2-\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{-(-4)+\sqrt{12}}{2\times 1}=2+\sqrt{3}$

$S=\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$