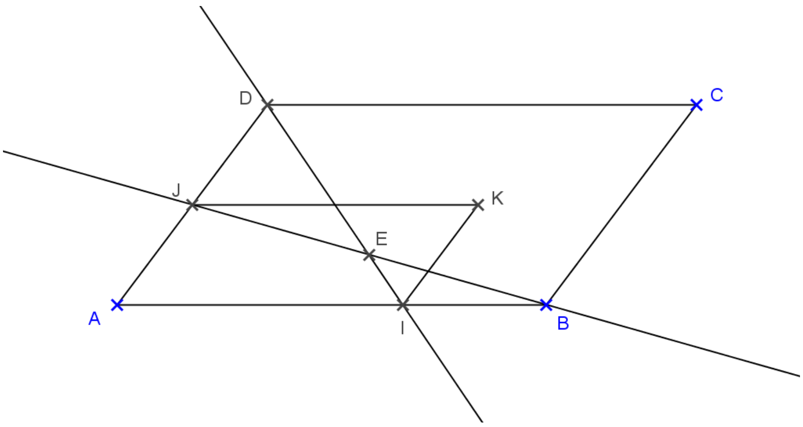
CORRECTION DU DM N°3

Exercice n°1:



2) On sait que $M(x\,;y)$ dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)$ ssi $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AI}+y\overrightarrow{AJ}$

- $A(0\,;0)$ car A est le centre du repère.
- $I(1\,;0)$ car $\overrightarrow{AI}=1\overrightarrow{AI}+0\overrightarrow{AJ}$
- $J(0\,;1)$ car $\overrightarrow{AJ}=0\overrightarrow{AI}+1\overrightarrow{AJ}$
- $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ d'ou $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et donc $B(\frac{3}{2}\,;0)$
- $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ d'ou $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AJ}$ et donc $D(0;\,2)$
- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

  Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ d'où : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

  On sait que, $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AJ}$ donc : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AJ}$, ce qui donne : $C(\frac{3}{2}\,;2)$
- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}$

  Comme AIKJ est un parallélogramme, $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AJ}$ d'où : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$ et donc $K(1;\,1)$

3) $M(x\,;y)$ € (DI) ssi $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DM}(x-0\,;\,y-2)$ donc $\overrightarrow{DM}(x\,;\,y-2)$

$\overrightarrow{DI}(1-0\,;\,0-2)$ donc $\overrightarrow{DI}(1\,;\,-2)$

$\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires ssi $X_{\overrightarrow{DI}}\times Y_{\overrightarrow{DM}}-X_{\overrightarrow{DM}}\times Y_{\overrightarrow{DI}}=0$ ce qui donne : $1\times(y-2)-x\times(-2)=0$

On trouve (DI) : $2x+y-2=0$

4) $M(x\,;y)$ € (BJ) ssi $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BM}(x-\frac{3}{2}\,;\,y-0)$ donc $\overrightarrow{BM}(x-\frac{3}{2}\,;\,y)$

$\overrightarrow{BJ}(0-\frac{3}{2}\,;\,1-0)$ donc $\overrightarrow{BJ}(-\frac{3}{2}\,;\,1)$

$\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires ssi $X_{\overrightarrow{BM}}\times Y_{\overrightarrow{BJ}}-X_{\overrightarrow{BJ}}\times Y_{\overrightarrow{BM}}=0$ ce qui donne : $(x-\frac{3}{2})\times 1-(-\frac{3}{2})\times y=0$

On trouve (BJ) : $x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$ ou $2x+3y-3=0$

5) Les coordonnées du point E, intersection des droites (DI) et (BJ) sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 & \times(-1) \\ 2x+3y-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-y+2=0 \\ 2x+3y-3=0 \end{cases}$$ En additionnant les 2 lignes, on obtient : $2y - 1 = 0$ et donc $y = \frac{1}{2}$

En remplaçant y par $\frac{1}{2}$ dans $2x + y - 2 = 0$, on trouve : $2x + \frac{1}{2} - 2 = 0$ d'où $2x = \frac{3}{2}$ et donc $x = \frac{3}{4}$

Conclusion : $E(\frac{3}{4};\frac{1}{2})$

6) Les points C,E et K sont alignés ssi $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires.

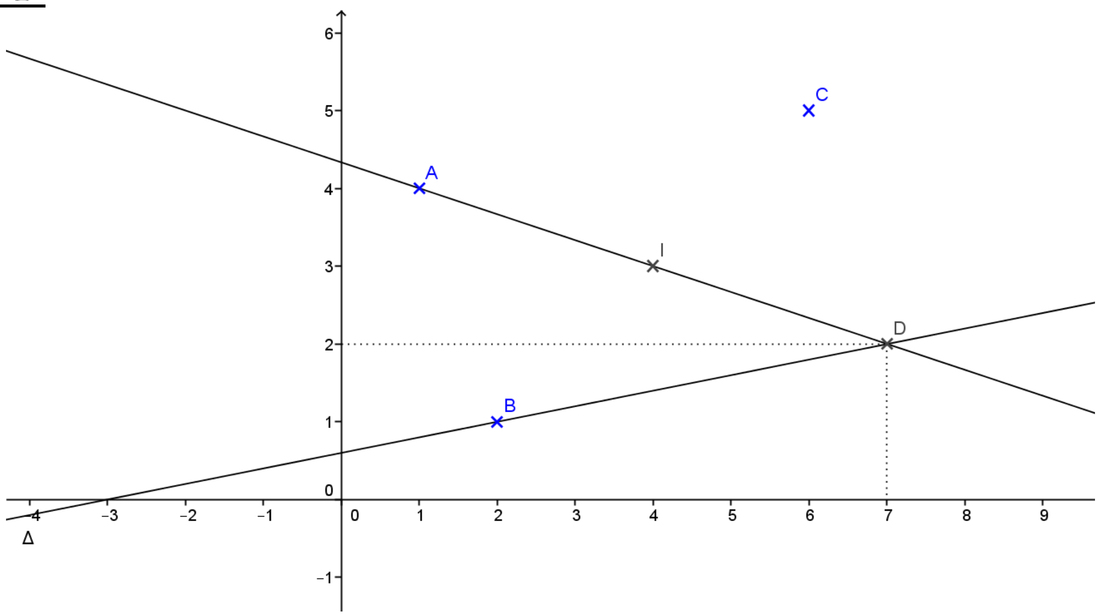
$\overrightarrow{CE}(\frac{3}{4}-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} - 2)$ donc $\overrightarrow{CE}(-\frac{3}{4} ; -\frac{3}{2})$

$\overrightarrow{CK}(1-\frac{3}{2} ; 1 - 2)$ donc $\overrightarrow{CK}(-\frac{1}{2} ; -1)$

$X_{\overrightarrow{CE}} \times Y_{\overrightarrow{CK}} - X_{\overrightarrow{CK}} \times Y_{\overrightarrow{CE}} = (-\frac{3}{4}) \times (-1) - (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires.

Conclusion : Les points C,E et K sont alignés.

<u>Exercice n°2:</u>



2) I est le milieu de [BC] donc $I(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2})$ d'où $I(\frac{2+6}{2};\frac{1+5}{2})$ et donc $I(4 ;3)$

3) $M(x ;y) \in (AI)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}(x-1 ; y-4)$

$\overrightarrow{AI}(4-1 ; 3-4)$ donc $\overrightarrow{AI}(3 ; -1)$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires ssi $X_{\overrightarrow{AI}} \times Y_{\overrightarrow{AM}} - X_{\overrightarrow{AM}} \times Y_{\overrightarrow{AI}} = 0$ ce qui donne : $3 \times (y-4) - (x-1) \times (-1) = 0$

On trouve (AI) : $x + 3y - 13 = 0$

4) $M(x ;y) \in \Delta$ ssi $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BM}(x-2 ; y-1)$

$\overrightarrow{AC}(6-1 ; 5-4)$ donc $\overrightarrow{AC}(5 ; 1)$

$\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $X_{\overrightarrow{BM}} \times Y_{\overrightarrow{AC}} - X_{\overrightarrow{AC}} \times Y_{\overrightarrow{BM}} = 0$ ce qui donne : $(x-2) \times 1 - 5 \times (y-1) = 0$

On trouve Δ : $x - 5y + 3 = 0$

5)

$$\begin{cases} x + 3y - 13 = 0 \\ -x + 5y - 3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant les 2 lignes, on obtient : $8y - 16 = 0$ et donc $y = \frac{16}{8} = 2$

En remplaçant y par 2 dans $x + 3y - 13 = 0$, on trouve : $x + 6 - 13 = 0$ donc $x = 7$

Conclusion : $S = \{(7\,;\,2)\}$

Les solutions de ce système sont les coordonnées du point d'intersection des droites (AI) et Δ.

Exercice n°3:

1) Δ_a d'équation : $(a+2)\,x + (a^2 - 1)\,y + a^2 + a + 1 = 0$ admet comme vecteur directeur $\vec{v}(-(a^2-1); (a+2))$

a) L'axe des ordonnées a pour équation : $x = 0$ et admet comme vecteur directeur $\vec{j}\,(0\,;\,1)$

Δ_a et l'axe des ordonnées sont parallèles ssi $\vec{v}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires

C'est-à-dire : $X_{\vec{j}} \times Y_{\vec{v}} - X_{\vec{v}} \times Y_{\vec{j}} = 0$ qui équivaut à $0 \times (a+2) - (-(a^2-1)) \times 1 = 0$

On obtient : $a^2 - 1 = 0$ d'où $a^2 = 1$ qui donne $a = -1$ ou $a = 1$

b) L'axe des abscisses a pour équation : $y = 0$ et admet comme vecteur directeur $\vec{i}\,(1\,;\,0)$

Δ_a et l'axe des abscisses sont parallèles ssi $\vec{v}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires

C'est-à-dire : $X_{\vec{i}} \times Y_{\vec{v}} - X_{\vec{v}} \times Y_{\vec{i}} = 0$ qui équivaut à $1 \times (a+2) - (-(a^2-1)) \times 0 = 0$

On obtient : $a + 2 = 0$ d'où $a = -2$

c) Δ_a passe par l'origine du repère ssi ses coordonnées $(0\,;\,0)$ vérifient l'équation de la droite Δ_a.

On a donc : $(a+2) \times 0 + (a^2 - 1) \times 0 + a^2 + a + 1 = 0$ d'où $a^2 + a + 1 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc cette équation n'a pas de solution.

Conclusion : Il n'existe pas de valeur de a pour laquelle Δ_a passe par l'origine.

d) Δ_a admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1;2)$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

C'est-à-dire : $X_{\vec{u}} \times Y_{\vec{v}} - X_{\vec{v}} \times Y_{\vec{u}} = 0$ qui équivaut à $1 \times (a+2) - (-(a^2-1)) \times 2 = 0$

On obtient : $2a^2 + a = 0$ d'où $a(2a + 1) = 0$

Ce qui donne soit $a = 0$, soit $2a + 1 = 0$ et donc $a = -\frac{1}{2}$

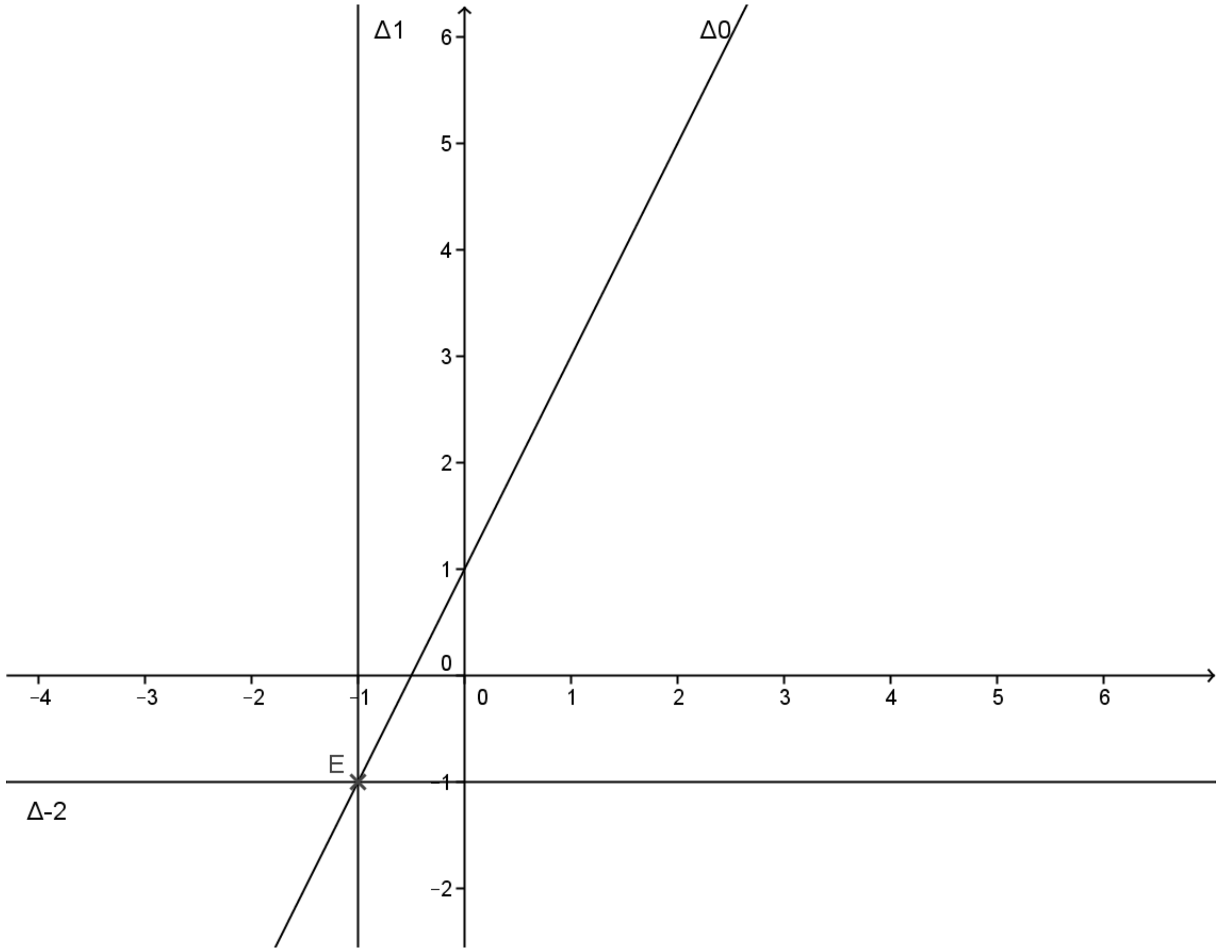
2) Δ_0 a pour équation : $(0+2)\,x + (0^2 - 1)\,y + 0^2 + 0 + 1 = 0$ c'est-à-dire $\Delta_0 : 2x - y + 1 = 0$

x	0	-1
y	1	-1

Δ_1 a pour équation : $(1+2)\,x + (1^2 - 1)\,y + 1^2 + 1 + 1 = 0$ c'est-à-dire $\Delta_1 : 3x + 3 = 0$ ou $\Delta_1 : x = -1$

Δ_{-2} a pour équation : $(-2+2)\,x + ((-2)^2 - 1)\,y + (-2)^2 + (-2) + 1 = 0$ c'est-à-dire $\Delta_{-2} : 3y + 3 = 0$ ou $\Delta_{-2} : y = -1$

Ces 3 droites sont concourantes en $A(-1\,;\,-1)$ car les coordonnées du point A vérifient les 3 équations.



3) Le point $A(-1\ ;\ -1)$ appartient à Δ_a quelquesoit a, ssi les coordonnées du point A vérifient l'équation :

$$(a+2)\,x + (a^2 - 1)\,y + a^2 + a + 1 = 0$$

Or $(a+2)\,(-1) + (a^2 - 1)\,(-1) + a^2 + a + 1 = \cancel{-a} - 2 \cancel{- a^2} + 1 \cancel{+ a^2} + \cancel{a} + 1 = 0$

Conclusion : pour tout a, A appartient à Δ_a.