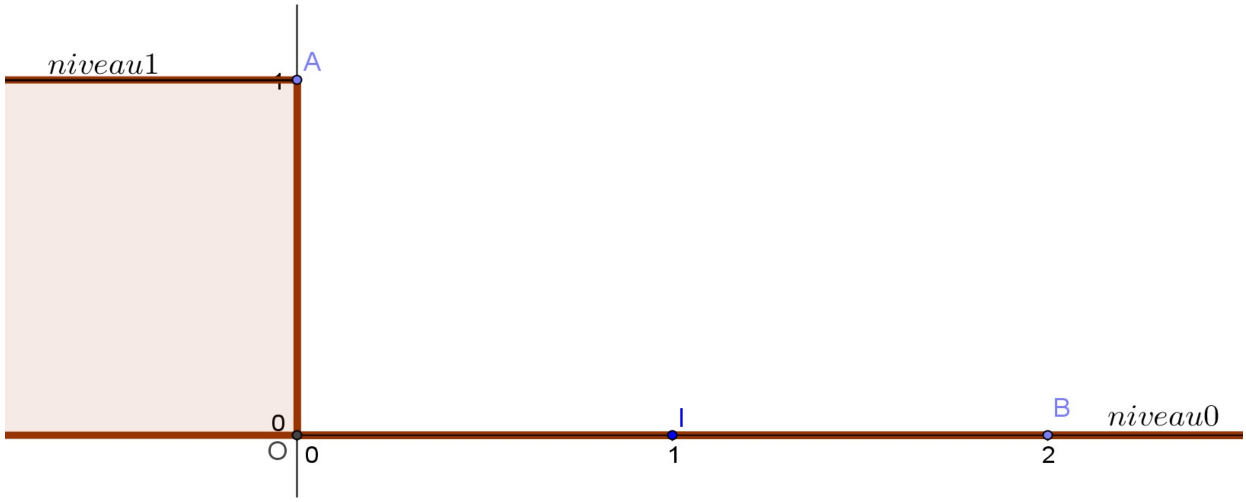
Devoir Maison n°9



On souhaite relier le point A du niveau 1 et le point B du niveau 0, par une rampe.

Dans le repère orthonormé (O, I, A) (voir graphique), le profil de la rampe est une courbe C qui représente une fonction f, définie et dérivable sur $[0;2]$. La courbe C doit respecter quatre contraintes :

- (1) C passe par A.
- (2) C admet en A une tangente horizontale.
- (3) C passe par B.
- (4) C admet en B une tangente horizontale.

1. Expliquer pourquoi une fonction affine ne peut convenir pour le choix de f.
2. On recherche dans la suite, une solution sous la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, où a b c et d sont des constantes réelles.
   a) Montrer que $d=1$.
   b) Calculer $f'(x)$.
   c) Montrer que la contrainte (2) entraîne que $c=0$.
   d) Montrer à l'aide des contraintes (3) et (4) que $(a;b)$ est solution du système : $\begin{cases} 8a+4b+1=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$
   e) Résoudre le système précédent et en déduire que $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+1$.
   f) Montrer que la fonction f définie ci-dessus satisfait les contraintes.
3. On pose pour x réel de $[0;2]$, $g(x)=|f'(x)|$. ($g(x)$ mesure la pente de la rampe au point de C d'abscisse x)
   a) Étudier le signe de $f'(x)$ pour x variant dans $[0;2]$, et en déduire que $g(x)=\frac{3}{4}(-x^2+2x)$
   b) Déterminer en quel point de C la pente de la rampe est maximale et exprimer en pourcentage cette pente.