

Chapitre XII : Probabilités

I) Vocabulaire

1) Expérience aléatoire, éventualité, univers

Exemple : (On utilisera cet exemple jusqu'à la fin du I).

On lance un dé non truqué à 6 faces et on note le numéro de la face supérieure.

- Une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat est une , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées
- L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé On le note Ω .

Exemple : $\Omega = \{ \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots \}$

2) Événements

- Un est une partie de l'univers. On définit souvent un événement par une phrase.

Exemple : Soit l'événement A : « Obtenir un nombre pair », alors $A = \{ \dots ; \dots ; \dots \}$

- Un événement est un événement ne comportant qu'une seule éventualité.

Exemple : B : « Obtenir un multiple de 5 » est un événement élémentaire car $B = \{ \dots \}$

- Un événement , noté \emptyset est un événement qui ne se réalise jamais.

Exemple : C : « Obtenir 7 » est un événement impossible.

- La de deux événements A et B , noté $A \cup B$ est le « regroupement » de ces deux événements. On dit que l'on a A **ou** B .

Exemple : D : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 »

On a alors : $A \cup D = \{ \dots ; \dots ; \dots ; \dots \}$

Et $A \cup D$: « »

- L'..... de deux événements A et B , noté $A \cap B$ contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B . On dit que l'on a A **et** B .

Exemple : On a : $A \cap D = \{ \dots ; \dots \}$

et $A \cap D$: « »

- Deux événements sont quand $A \cap B = \emptyset$

Exemple : A et B sont incompatibles car

- L'événement de A , noté \bar{A} , est composé des événements élémentaires non contenus dans A .

Exemple : On a : $\bar{A} = \{ \dots ; \dots ; \dots \}$

et \bar{A} : « »

II) Calcul des probabilités

1) Loi de probabilité

Définition 1 : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Définir une **loi de probabilité** P sur Ω , c'est associer, à chaque événement élémentaire e_i , un nombre $p_i \in [0; 1]$ tels que :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Remarque : Les nombres p_i sont alors appelés de l'événement élémentaire

Principe fondamental : La probabilité d'un événement A , notée $p(A)$, est égale à la des probabilités des événements qui le composent.

Conséquences :

- $p(\Omega) = \dots\dots\dots$
- $p(\emptyset) = \dots\dots\dots$
- pour tout événement A , $\dots\dots\dots \leq p(A) \leq \dots\dots\dots$

Exemple : Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue e_i	1	2	3	4	5	6
Probabilité p_i	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	?

Quelle est la probabilité de l'événement $A = \text{"obtenir un résultat inférieur ou égal à 4"}$:
D'après le principe fondamental : $P(A) = \dots\dots\dots = \dots\dots$

Calculer la probabilité d'obtenir 6 :

D'après la définition, $\dots\dots\dots = \dots\dots$, donc $p_6 = \dots\dots$

Propriété 1 : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, P une loi de probabilité sur Ω , A et B des événements :

- ✓ $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- ✓ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$,
- ✓ Si A et B sont incompatibles, $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple : Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des deux instruments. On choisit un élève au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument et quelle est la probabilité qu'il n'en joue pas?
Notons C : "l'élève joue d'un instrument à corde" et V : "l'élève joue d'un instrument à vent"

On a : $p(C) = \dots\dots\dots$, $p(V) = \dots\dots\dots$ et $p(C \cap V) = \dots\dots\dots$

D'après la propriété, on obtient : $p(C \cup V) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

De plus $p(\overline{C \cup V}) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

2) Equiprobabilité

Définition 2 : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou que la loi de probabilité est **équirépartie**.

Propriété 2 : Si la loi de probabilité P associée à une expérience aléatoire d'univers Ω est équirépartie, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu non truqué de 32 cartes et on note F : « tirer une figure ». Calculer $p(F)$.

.....

.....