Fiche révision n°4

Correction

classe 204

Exercice 1

On commence par lire les coordonnées des points du repère :

$A(-2;3)$ $B(2;2)$ $C(3;-2)$ $D(-1;-1)$

①

⋆ déterminer les coordonnées du milieu I milieu de $[AC]$:

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{-2+3}{2}\ ;\ \frac{3+(-2)}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

⋆ déterminer les coordonnées du milieu J milieu de $[BD]$

$$J\left(\frac{x_B+x_D}{2}\ ;\ \frac{y_B+y_D}{2}\right)$$
$$J\left(\frac{2+(-1)}{2}\ ;\ \frac{2+(-1)}{2}\right)$$
$$J\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

⋆ on observe alors que I et J sont confondus, autrement dit, le quadrilatère $ABCD$ est tel que ses diagonales se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

② Pour simplifier les calculs, nous allons calculer les distances au carré.

$$\begin{aligned} IA^2 &= (x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2 \\ &= (-2-\frac{1}{2})^2+(3-\frac{1}{2})^2 \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{25}{4}+\frac{25}{4} \\ &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IB^2 &= (x_B-x_I)^2+(y_B-y_I)^2 \\ &= (2-\frac{1}{2})^2+(2-\frac{1}{2})^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4}+\frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 \\ &= (2-(-2))^2+(2-3)^2 \\ &= 4^2+1^2 \\ &= 16+1 \\ &= 17 \end{aligned}$$

⋆ dans le triangle ABI, le côté le plus long est $[AB]$.
On a : $AB^2=17$ et $IA^2+IB^2=\frac{25}{2}+\frac{9}{2}=\frac{34}{2}=17$. D'où $AB^2=IA^2+IB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABI est rectangle en I.
On en conclut que les diagonales (IA) et (IB) du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires.
Or un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange, donc $ABCD$ est un losange.

Exercice 2

Par quels calculs pourrait-on démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange ?

On pourrait par exemple calculer les longueurs des 4 côtés et montrer qu'ils sont tous égaux.

Sinon, on utilise un raisonnement analogue à l'exercice 1 : on montre dans un premier temps que c'est un parallélogramme (diagonales ont même milieu) puis que ces diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 3

On note $(O\ ;\ I,J)$ un repère orthonormé et les points $M(-1;-1)$, $N(1;3)$ et $P(5;1)$.

① Le triangle MNP semble isocèle et rectangle. Calculons alors les longueurs NM, NP et MP pour démontrer notre supposition.
$NM=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$NP=\sqrt{(x_P-x_N)^2+(y_P-y_N)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{(4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$MP=\sqrt{(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2}=\sqrt{(5-(-1))^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{(6^2+2^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

- on observe tout d'abord que $NM = NP$. Le triangle MNP est donc isocèle en N.
- montrons désormais que MNP est un triangle rectangle.
  Le côté le plus long dans MNP est $[MP]$
  D'une part : $MP^2 = 40$ D'autre part : $NP^2 + NM^2 = 20 + 20 = 40$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en N.

② Les coordonnées $(x_K; y_K)$ de K milieu de $[MP]$ sont données par :

$$x_K = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Ainsi K a pour coordonnées $(2; 0)$

③ Dire que R est le symétrique de N par rapport à K revient à dire que K est le milieu de $[RN]$. Autrement dit, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_K &= \frac{x_R + x_N}{2} \\ 2 &= \frac{x_R + 1}{2} \\ 4 &= x_R + 1 \\ x_R &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_K &= \frac{y_R + y_N}{2} \\ 0 &= \frac{y_R + 3}{2} \\ 0 &= y_R + 3 \\ y_R &= -3 \end{aligned}$$

Ainsi R a pour coordonnées $(3; -3)$

④
- tout d'abord $MNPR$ est un parallélogramme car ses diagonales $[RN]$ et $[MP]$ ont le même milieu K.
- ensuite, $MNPR$ est un rectangle car un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.
- enfin, $MNPR$ est un carré car les deux côtés adjacents $[MN]$ et $[NP]$ ont même longueur.

⑤ Pour déterminer les coordonnées de S tel que que $NKPS$ soit un parallélogramme, nous allons utiliser la propriété que dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieux, ainsi dans notre cas les milieux de $[NP]$ et $[KS]$ sont confondus.
- commençons par calculer les coordonnées de I milieu de $[NP]$
  $$x_I = \frac{x_N + x_P}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_I = \frac{y_N + y_P}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
  Le milieu I commun de $[NP]$ et $[KS]$ a pour coordonnées $(3; 2)$
- ensuite on utilise le fait que I est le milieu de $[KS]$. Autrement dit, nous avons les égalités suivantes :
  $$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_K + x_S}{2} \\ 3 &= \frac{2 + x_S}{2} \\ 6 &= x_S + 2 \\ x_S &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_I &= \frac{y_K + y_S}{2} \\ 2 &= \frac{0 + y_S}{2} \\ 4 &= y_S \end{aligned}$$

  Ainsi S a pour coordonnées $(4; 4)$