Synthèse de cours — Chapitre 3

→ La fonction logarithme népérien

I) Définition et premières propriétés

1) Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée « ln » est la primitive définie sur $]0, +\infty[$ et s'annulant pour $x = 1$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2) Premières propriétés

- La fonction logarithme népérien est définie sur .... ;
- $ln\,1 =$ ...... ;
- ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a : $ln'(x) =$ .... =....
- La fonction ln est .... sur $]0, +\infty[$. Il en découle :
    - o Pour tout réel x de $]0,1[$, on a : $ln\,x$ .... ;
    - o Pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a : $ln\,x$ .... ;
    - o Pour tous réels x et y de $]0, +\infty[$, on a : $ln\,x = ln\,y$ équivaut à : .... ;
    - o Pour tous réels x et y de $]0, +\infty[$, on a : $ln\,x > ln\,y$ équivaut à : ....

II) Propriété fondamentale : logarithme népérien d'un produit

1) Logarithme népérien d'un produit

Pour tous réels x et y de $]0, +\infty[$: $\boxed{ln(xy) = ln\,x + ln\,y}$

2) Conséquences de la propriété fondamentale

- Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ .... ;
- Pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$, on a : $ln\left(\frac{x}{y}\right) =$ .... ;
- Pour tout réel x de $]0, +\infty[$ et tout entier relatif n, on a : $ln\left(x^n\right) =$ .... ;
- Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a : $ln\left(\sqrt{x}\right) =$ ....

Exemples : $ln\ 20 = $ ....

$ln\ \frac{49}{27} = $ ....

III) Etude de la fonction logarithme népérien

1) *Limites aux bornes de l'ensemble de définition*

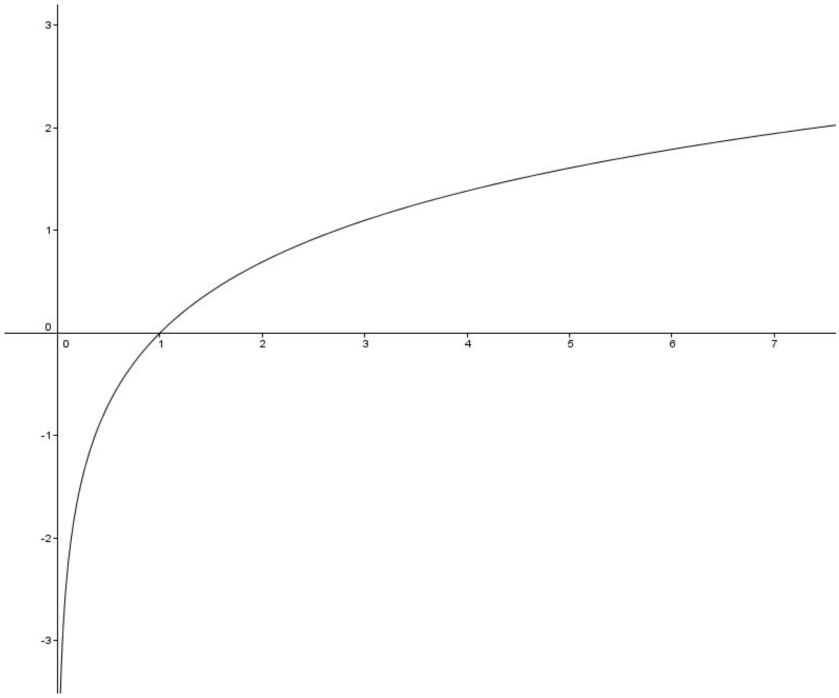
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} ln\ x = \ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to +\infty} ln\ x = \ldots\ldots\ldots$$

2) *Tableau de variation*

x	
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	
$\ln x$	

3) *Courbe représentative*



Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

4) *Notation*

On désigne par ***e*** la solution de l'équation $ln\ x = 1$.
Une calculatrice donne : e = ... ;

IV) Résolution d'équation avec logarithme

Pour tout réel m, e^m est l'unique solution de l'équation $ln\ x = m$.

En effet, $ln\ (e^m)$ = ... = ...

Remarque : *Avant de résoudre une équation, il faut préciser l'ensemble des valeurs de x possibles.*

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

$ln\ x + 3 = 5$ $\qquad\qquad$ $ln\ (x - 2) = 3$

V) Limites fondamentales

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^n} \right) = \quad}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^n\ ln\ x) = \quad}$

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^3} \right) + 2x - 5 =$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2\ ln\ x + 3x - 1) =$

VI) Dérivée de *ln(u(x))*

Pour toute fonction u à valeur strictement positive, définie et dérivable sur un intervalle I , on a :

Fonction	Dérivée
$ln\ (u(x))$	

Exemples : Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = ln\ (2x - 7)$

$g(x) = ln\ (x^2 + 4x - 3)$