Synthèse de cours

Chapitre 5 → Primitives

I) Primitives d'une fonction sur un intervalle

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On a dira que la fonction F, définie sur I, est « une primitive de la fonction f sur l'intervalle I » si on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \, , F'(x) = f(x)$$

Exemples : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+3$. Trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2-6x+7$. Trouver une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

2) Propriété fondamentale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. **Si** f admet une primitive F sur I **alors** f admet une infinité de primitives G sur I définies par :

$$\forall x \in \mathrm{I} \, , G(x) = F(x) + k$$

Où k est une constante réelle quelconque.

Exemple : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x-5$. trouver plusieurs primitives de h sur $\mathbb{R}$.

3) Primitive prenant une valeur particulière en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I et y_0 un réel.

Si f admet des primitives sur I **alors** il en existe une seule, F, telle que : $F(x_0) = y_0$.

Exemple : Parmi les primitives de h trouvées dans le 2), déterminer celle qui vérifie $H(2)=7$.

II) Calcul de primitives

1) Propriétés (linéarité)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit α un réel.

- **Si** F est une primitive de f sur I **alors** αF est une primitive de αf sur I ;
- **Si** F et G sont des primitives respectivement de f et g sur I **alors** $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

2) Fonctions usuelles

f	F	Intervalle I (maximal)
k $(k \in \mathbb{R})$		
x		
x^n $(n \quad)$		
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{x^n}$ $(n \quad)$		
e^x		

Exemples : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3e^x$. Trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}$. Trouver une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

3) Formulaire

Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I, on a :

f	F
$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	

Exemples : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^3$. Trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+5}}$. Trouver une primitive de g sur $\mathbb{R}$.