Problème :

Première partie

On considère la fonction g définie sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

2. En déduire le sens de variation de la fonction g. Aucun calcul de limite n'est demandé, mais on précisera la valeur du minimum.

3. Expliquer comment on en déduit que g est strictement positive sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$ par $f(x) = x + 2 + 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{e}\right)$, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

2. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

4. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

5. En utilisant un résultat de la **première partie**, étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

6. Dans le repère indiqué, tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

Troisième partie

Une entreprise fabrique une quantité x (en tonnes) d'un certain produit pour un coût total noté $c(x)$ et un prix de vente total noté $p(x)$.
On admettra que, pour $x \geqslant 0{,}6$, $c(x) = x + 2$ et $p(x) = x + 2 + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

À l'aide du graphique obtenu précédemment, répondre aux questions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. Pour quelles quantités de produit l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

2. Pour quelle quantité de produit l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?

Problème :

Première partie

On considère la fonction g définie sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

2. En déduire le sens de variation de la fonction g. Aucun calcul de limite n'est demandé, mais on précisera la valeur du minimum.

3. Expliquer comment on en déduit que g est strictement positive sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$ par $f(x) = x + 2 + 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

1. Calculer la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{e}\right)$, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

2. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

4. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

5. En utilisant un résultat de la **première partie**, étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

6. Dans le repère indiqué, tracer la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

Troisième partie

Une entreprise fabrique une quantité x (en tonnes) d'un certain produit pour un coût total noté $c(x)$ et un prix de vente total noté $p(x)$.
On admettra que, pour $x \geqslant 0{,}6$, $c(x) = x + 2$ et $p(x) = x + 2 + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

À l'aide du graphique obtenu précédemment, répondre aux questions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. Pour quelles quantités de produit l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

2. Pour quelle quantité de produit l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?